Chapitre 2

Les Bases de l'algèbre linéaire

2.1 Espaces vectoriels

C'est Giuseppe Peano, vers la fin du 19ème siècle, qui dégage le premier les notions d'espaces vectoriels et d'applications linéaires abstraites que nous étudions dans ce cours.

Les éléments d'un espace vectoriels sont appelés vecteurs. Comme les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, on peut additionner les vecteurs et les multiplier par un nombre. Ces opérations vérifient quelques propriétés que nous allons isoler dans la définition suivante.

Definition 1. *Un $\mathbb{R}$-espace vectoriel est un triplet $(E, +, .)$ formé d'un ensemble E dont les éléments sont appelés vecteurs, d'une loi d'addition, notée $+$, qui est une application $E \times E \to E$ qui à deux vecteurs $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ de E associe un vecteur $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in E$, qu'on appellera somme des deux vecteurs, et d'une loi de multiplication par un scalaire notée $\cdot$ qui est une application $\mathbb{R} \times E \to E$ qui associe à un nombre réel λ et un vecteur $\boldsymbol{u}$ le vecteur $\lambda\boldsymbol{u}$ qu'on appellera produit du vecteur $\boldsymbol{u}$ par le réel λ.*

Axiomes de la somme :

1. **Associativité** *pour tous $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$ de E, $\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w}$.*
2. **Commutativité** *pour tous $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ de E, $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$.*
3. **Neutre** *il existe un élément de E noté 0 tel que, pour tout $\boldsymbol{u}$ de E, $\boldsymbol{u} + 0 = \boldsymbol{u}$.*
4. **Opposé** *Pour tout $\boldsymbol{u}$ de E, il existe $\boldsymbol{v} \in E$ tel que $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = 0$.*

Axiomes de compatibilité pour la multiplication :

1. **produit de réels** *pour tout $\boldsymbol{u}$ de E, λ et μ de $\mathbb{R}$, $(\lambda\mu)\boldsymbol{u} = \lambda(\mu\boldsymbol{u})$.*
2. **Somme de réels** *pour tout $\boldsymbol{u}$ de E, λ et μ de $\mathbb{R}$, $(\lambda + \mu)\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u} + \mu\boldsymbol{u}$.*
3. **Somme de vecteurs** *pour tous $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ de E, λ de $\mathbb{R}$, $\lambda(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = \lambda\boldsymbol{u}+\lambda\boldsymbol{v}$.*
4. **Unité** *Pour tout $\boldsymbol{u}$ de E, $1\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$.*

Conséquences immédiates

— L'associativité permet d'éviter de mettre des parenthèses dans les sommes de vecteurs.

— La commutativité permet d'échanger les termes d'une somme.
— On a $0 + \mathbf{u} = \mathbf{u}$ pour tout $\mathbf{u} \in E$.
— L'opposé de $\mathbf{u}$ est noté $-\mathbf{u}$ et $\mathbf{u} + (-\mathbf{v})$ est noté $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ de sorte qu'on a, pour tout $\mathbf{u}$, $\mathbf{u} - \mathbf{u} = 0$.
— Si $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$, alors $\mathbf{v} = \mathbf{w}$.
— $0\mathbf{u} = 0$.
— $\lambda 0 = 0$.
— $(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u}$.
— $2\mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{u}$.

2.1.1 Exemples d'espaces vectoriels

$\mathbb{R}^n$ muni de la somme de vecteurs et du produit par un réel.
L'ensemble des fonctions d'un ensemble I dans $\mathbb{R}$, muni de la somme de fonctions et de la multiplication par un réel.
L'ensemble des suites à valeurs réelles.
L'espace $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels, qu'on identifiera aux fonctions de la forme $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.
L'ensemble des fonctions d'un ensemble X à valeurs dans un espace vectoriel E.
Exercice : vérifier que ces ensembles vérifient bien les axiomes définissant les espaces vectoriels.

2.1.2 Espaces vectoriels sur des corps plus généraux

Nous nous limiterons dans ce cours, à de rares exceptions près, aux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$. Les nombres réels s'additionnent et se multiplient, les deux lois sont associatives et commutatives, il existe des éléments 0 et 1 qui sont des éléments neutres pour l'addition et la multiplication, tout réel a un opposé pour l'addition et tout réel non nul a un inverse pour la multiplication.

Il existe d'autres ensembles vérifiant ces propriétés, comme l'ensemble des nombres complexes ou l'ensemble des nombres rationnels. Dedekind donne à de tels ensembles le nom de corps. Les résultats que nous allons énoncer pour les espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ restent valables si $\mathbb{R}$ est remplacé par un autre corps K.

2.1.3 Sous-espaces vectoriels

Definition 2. *Soit E un espace vectoriel et F un sous-ensemble de E. Si F est non vide et vérifie*

1. *Pour tous $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ de F et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{u} + \lambda \boldsymbol{v} \in F$.*

Alors F est un espace vectoriel appelé sous-espace vectoriel de E.

Exercice : Vérifier que F est un espace vectoriel.

Proposition 3. *L'intersection d'une famille de sous-espace vectoriels est un sous-espace vectoriel.*

Preuve : Exercice. □

2.1.4 Exemples de sous-espaces vectoriels

Sous-espaces de l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$.

— L'ensemble des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$.

— L'ensemble des fonctions de classe C^k de I dans $\mathbb{R}$.

— L'ensemble des fonctions f de classe C^k de I dans $\mathbb{R}$ telles que

$$a_k f^{(k)} + \ldots + a_1 f' + a_0 f = 0 \ .$$

— L'ensemble des fonctions bornées de I dans $\mathbb{R}$.

Sous-espaces de l'ensemble des suites.

— L'espace des suites convergentes.

— L'espace des suites bornées.

— L'espace des suites telles que $\sum_{n\geqslant 0} |u_n| < \infty$.

Sous-espaces de l'ensemble des polynômes.

— L'espace $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur à n.

Sous-espaces de l'ensemble de $\mathbb{R}^n$.

— L'ensemble des vecteurs $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ vérifiant un système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{p,1}x_1 + a_{p,2}x_2 + \ldots + a_{p,n}x_n = 0 \end{cases}$$

L'ensemble $L(E, F)$ des applications linéaires de E dans F.

2.1.5 Espace engendré

Definition 4. *Soit E un espace vectoriel et A un sous-ensemble de E. On appelle espace engendré par A l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de A, c'est à dire l'ensemble des vecteurs $\boldsymbol{v}$ de la forme*

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=0}^{n} a_i \boldsymbol{u}_i \ ,$$

où les a_i sont réels et les $\boldsymbol{u}_i$ des éléments de A. On note cet ensemble Vect(A).

Par exemple, une droite est un espace engendré par un vecteur non nul.

Proposition 5. *L'espace engendré par A est l'intersection des sous-espaces vectoriels de E contenant A.*

$$\mathrm{Vect}(A) = \cap_{F\supset A} F \ .$$

En particulier donc, $\mathrm{Vect}(A)$ *est un espace vectoriel.*

Preuve : **Exercice.** □

2.1.6 Sommes de sous-espaces

Definition 6. *Soit F, G des sous-espaces vectoriels de E. On appelle $F + G$ l'ensemble des vecteurs $\boldsymbol{v} \in E$ de la forme $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_F + \boldsymbol{u}_G$, où $\boldsymbol{u}_F \in F$ et $\boldsymbol{u}_G \in G$.*

Proposition 7. *$F + G$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Preuve : **Exercice.** □

2.2 Bases et dimension

L'algèbre linéaire s'est développé au début du 20ème siècle pour étudier des problèmes d'analyse fonctionnelle. Ces problèmes font intervenir des espaces de dimension infinie. Plus récemment, des problèmes de statistiques et d'informatiques ont motivé le développement de nouveaux résultats d'algèbre linéaire en dimension finie. Une des clés de cet essor est le concept de base. Muni d'une base, les éléments d'un espace vectoriel de dimension finie sont “encodables" dans des vecteurs qu'on peut manipuler algorithmiquement et sur lesquels on peut faire des calculs. Dans cette section, on rappelle les éléments permettant de définir ces notions ainsi que les premières propriétés fondamentales de ces objets.

2.2.1 Famille génératrice

Soit E un espace vectoriel.

Definition 8. *Une collection G de vecteurs de E tel que* $\mathrm{Vect}(G) = E$ *est appelée famille génératrice de E.*

Definition 9. *On dit que l'espace E est de dimension finie s'il existe une famille génératrice de E de cardinal fini.*

— Toute famille contenant une famille génératrice est génératrice.
— L'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur à n est un espace de dimension finie. (donner une famille génératrice !)

2.2.2 Famille libre

Definition 10. *Une collection G de vecteurs de E est appelée famille libre si tout vecteur de* $\mathrm{Vect}(G)$ *s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire d'éléments de G. Si G n'est pas libre on dit qu'elle est liée. Si $G = (\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_p)$ est une famille libre, on dit aussi que les vecteurs $\boldsymbol{u}_i$ sont linéairement indépendants.*

— Une famille contenant le vecteur nul n'est jamais libre.
— La famille vide est libre.
— Une famille extraite d'une famille libre est libre.

Proposition 11. *Soit $G = (\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_p)$ une famille finie de vecteurs de E.*

1. *G est libre si et seulement si $a_1 \boldsymbol{u}_1 + \ldots + a_p \boldsymbol{u}_p = 0$ implique $a_1 = \ldots = a_n = 0$.*

2. *G est liée si et seulement si il existe $a_1, \ldots, a_p$ non tous nuls, tels que $a_1 \boldsymbol{u}_1 + \ldots + a_p \boldsymbol{u}_p = 0$.*
3. *Si G est liée, un vecteur de G est combinaison linéaire des autres.*

Preuve : Exercice. □

Exemple : Dans $\mathbb{R}^n$, une famille triangulaire sans vecteur nul est libre.

2.2.3 Base

Definition 12. *Une famille B libre et génératrice de E est appelée base de E.*

Théorème 13. *Soit E un espace de dimension finie. On peut extraire de toute famille génératrice G de E une base de E.*

Preuve : Comme E est de dimension finie, il existe une famille finie F engendrant E. Puisque G engendre E, il existe une famille finie H de vecteurs de G engendrant F, donc E. Soit $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p)$ une sous-famille de H engendrant F, de cardinal minimal. Si elle était liée, un des vecteurs, disons $\mathbf{u}_p$ serait combinaison linéaire des autres, donc $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{p-1})$ serait une famille engendrant F de cardinal inférieur. C'est absurde, donc $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p)$ est libre. Comme elle est génératrice, c'est une base. □

Théorème 14. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Toute famille libre de E, $L = (\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_p)$, peut être complétée en une base $(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$ de E.*

Preuve : Si L engendre E, L est une base. Supposons donc que L n'engendre pas E. Comme E est de dimension finie, il existe une famille finie $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p)$ engendrant E. On pose $L^{(0)} = L$ et récursivement, si pour tout $i \in \{0, \ldots p-1\}$, si $L^{(i)} \cup \mathbf{v}_{i+1}$ est libre $L^{(i+1)} = L^{(i)} \cup \mathbf{v}_{i+1}$, sinon $L^{(i+1)} = L^{(i)}$. Par construction, $L^{(p)}$ est une famille libre engendrant $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p)$ donc E, donc c'est une base de E. □

Definition 15. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $B = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ une base de E. Tout vecteur $\mathbf{u}$ de E se décompose de manière unique sur la base B : il existe un unique vecteur $\boldsymbol{u}_c = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ tel que*

$$\boldsymbol{u} = u_1 \boldsymbol{e}_1 + \ldots + u_n \boldsymbol{e}_n \quad .$$

Le vecteur $\mathbf{u}_c$ est appelé vecteur des coordonnées de E dans la base B.

2.2.4 Dimension

Proposition 16. *Soit E un espace vectoriel et $B = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ une base de E. Toute famille de m vecteurs, avec $m > n$ est liée.*

Preuve : Soit $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$ une famille de m vecteurs. On décompose chacun de ces vecteurs sur la base B :

$$\mathbf{u}_i = \sum_{j=1}^{n} u_{i,j} \mathbf{e}_j \quad .$$

On peut appliquer la méthode du pivot au tableau $u_{i,j}$. Comme $m > n$, il existe au moins une ligne nulle à la fin de l'algorithme, ce qui assure que la famille est liée. □

Théorème 17. *Dans un espace de dimension finie, toutes les bases ont même cardinal.*

Preuve : Exercice. □

Definition 18. *Le cardinal commun n des cardinaux des bases d'un espace de dimension finie E est appelé la dimension de E et est noté* $\dim(E)$.

Proposition 19. *Dans un espace de dimension n.*
- *Toute famille libre de cardinal n est une base.*
- *Toute famille génératrice de cardinal n est une base.*

Preuve : Exercice. □

Proposition 20. *Soit E un espace de dimension finie et F un sous-espace de E.*
- *F est de dimension finie.*
- $\dim(F) \leqslant \dim(E)$.
- *Si* $\dim(F) = \dim(E)$, $F = E$.

Preuve : Soit $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p$ une famille libre de F. Elle est libre dans E, donc elle peut être complétée en une base $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ de E. Ainsi, $p \leqslant n$. F ne contient aucune famille libre de plus de n éléments, c'est donc un espace de dimension finie, de dimension inférieure à n.

Si $\dim(F) = n$, F contient une famille libre de n éléments. Ces éléments forment une base de E, donc $F \supset E$. □

Proposition 21. *Soit F et G deux sous-espaces d'un espace E de dimension finie, alors*

$$\dim(F) + \dim(G) = \dim(F + G) + \dim(F \cap G) \ .$$

Preuve : Exercice. *Indication :* Prendre une base de $F \cap G$, la compléter en une base de F et de G et construire avec ces vecteurs une base de $F + G$. □

Definition 22. *Un hyperplan de E est un espace de dimension* $\dim(E) - 1$.

Un sous-espace F contenant un hyperplan H vérifie $F = H$ ou $F = E$.
Exemples : Une famille triangulaire sans vecteurs nul de $\mathbb{R}^n$ est une base.
La famille $1, X, \ldots, X^n$ de $\mathbb{R}_n[X]$ est une base.

2.3 Applications linéaires

Definition 23. *Soient E et F deux espace vectoriels. Une application $f : E \to F$ est dite linéaire si elle vérifie*

$$\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in E, \forall \lambda \in K, \qquad f(\boldsymbol{u} + \lambda \boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{u}) + \lambda f(\boldsymbol{v}) \ .$$

Les applications linéaires sont celles compatibles avec la structure d'espace vectoriel. On déduit de la définition que $f(0) = 0$ et si $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ sont des vecteurs de E et $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sont des scalaires,

$$f(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{u}_i) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(\mathbf{u}_i) \ .$$

La composée d'applications linéaires est linéaire.

Definition 24. *Soient E et F deux espace vectoriels, soient f et g deux applications linéaires $f, g : E \to F$ et soit $\lambda \in K$ un scalaire.*

La somme des applications f et g est l'application définie par $f + g : E \to F$, $\boldsymbol{u} \mapsto (f+g)(\boldsymbol{u}) = f(\boldsymbol{u}) + g(\boldsymbol{u})$.

La multiplication de f par le scalaire λ est l'application $\lambda f : E \to F$, $\boldsymbol{u} \mapsto (\lambda f)(\boldsymbol{u}) = \lambda f(\boldsymbol{u})$.

Proposition 25. *Muni de ces opérations, l'ensemble $L(E, F)$ de toutes les applications linéaires de E vers F est un espace vectoriel.*

Les éléments de $L(E, E)$ sont appelés les endomorphismes de E. On notera $L(E, E)$ plus simplement $L(E)$ dans la suite.

2.3.1 Exemples

Pour tout $a \in K$, l'application $h_a : E \to E$, définie par $h_a(\mathbf{u}) = a\mathbf{u}$ est une application linéaire. On l'appelle homothétie de rapport a.

Soit E l'espace vectoriel des fonctions de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans lui-même.

— Pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'application $\mathrm{ev}_a : E \to E$, $\mathrm{ev}_a(f) = f(a)$ est linéaire.
— L'application $D : E \to E$ définie par $D(f) = f'$ est linéaire.
— Pour tous réels a et b, l'application $I_{a,b} : E \to \mathbb{R}$ définie par $I_{a,b}(f) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est linéaire.
— Pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'application $\tau_a : E \to E$ définie par $\tau_a(f) = f(\cdot - a)$ est linéaire, de même que l'application $\Delta_a(f) = \tau_a(f) - f$.

2.3.2 Propriété universelle

Proposition 26. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $B = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ une base de E. Soit F un espace vectoriel et $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ des vecteurs de F. Il existe une unique application linéaire $f : E \to F$ telle que $f(\boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{u}_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

Preuve : Exercice ! □

2.3.3 Noyau

Definition 27. *Soient E, F deux espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application linéaire. Le noyau de f, noté $\ker(f)$ est la préimage de 0 par f, c'est à dire*

$$\ker(f) = \{\boldsymbol{x} \in E : f(\boldsymbol{x}) = 0\} \ .$$

Proposition 28. *Le noyau d'une application linéaire $f : E \to F$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Preuve : Exercice ! □

Soit E l'espace vectoriel des fonctions de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans lui-même. Soit $\theta : E \to E$, $f \mapsto \theta(f) = f'' - 3f' + 2f$. θ est une application linéaire, son noyau est l'ensemble des fonctions solutions de l'équation différentielle

$$f'' - 3f' + 2f = 0 \ .$$

Definition 29. *Une application f entre deux ensembles E et F est injective si, pour tout x et y de E, $x \neq y$, on a $f(x) \neq f(y)$.*

Proposition 30. *Soient E, F deux espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application linéaire. f est injective si et seulement* $\ker(f) = \{0\}$.

Preuve : Exercice ! □

Proposition 31. *Soient E, F deux espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application linéaire injective. Si $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ est une famille libre de E, alors $f(\boldsymbol{u}_1), \ldots, f(\boldsymbol{u}_n)$ est une famille libre de F.*

Preuve : Exercice ! □

2.3.4 Image d'une application linéaire

Soient E, F deux espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application linéaire.

Definition 32. *L'image d'un sous-ensemble G de E par f est l'ensemble défini par*

$$f(G) = \{\boldsymbol{y} \in F : \exists \boldsymbol{x} \in G,\ f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}\} \ .$$

On appelle image de f l'image de l'espace E

$$\mathrm{Im}(f) = f(E) \ .$$

Proposition 33. *Si G est un sous-espace vectoriel de E, $f(G)$ est un sous-espace vectoriel de F.*

Preuve : Exercice ! □

Definition 34. *Si f est un endomorphisme de E et G est un sous-espace de E, alors G est dit stable par f si $f(G) \subset G$.*

Proposition 35. *L'image de l'espace engendré par une famille G de vecteurs de E est l'espace engendré par la famille $f(G)$ dans F.*

En particulier, si G est une famille génératrice de E, $\mathrm{Im}(f)$ *est l'espace engendré par $f(G)$.*

Preuve : Exercice ! □

2.3.5 Théorème du rang

Théorème 36. *Soit E un espace de dimension finie, F un espace vectoriel quelconque et $f \in L(E,F)$. Les espaces* $\ker(f)$ *et* $\mathrm{Im}(f)$ *sont de dimensions finies et ces dimensions vérifient*

$$\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) \ .$$

Preuve : Comme $\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de E, il est de dimension finie. Soit $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_r$ une base de $\ker(f)$ qu'on complète en une base $B = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ de E. On sait que $f(B)$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$, donc $(f(\mathbf{e}_{r+1}), \dots, f(\mathbf{e}_n))$ est également une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$. Supposons que $a_{r+1}, \dots, a_n$ soient des scalaires tels que $\sum_{i=r+1}^n a_i f(\mathbf{e}_i) = 0$. On aurait alors

$$\sum_{i=r+1}^n a_i \mathbf{e}_i \in \ker(f) \ ,$$

donc par unicité de l'écriture des vecteurs de E sur la base B, $a_{r+1} = \ldots = a_n = 0$. Ainsi, la famille $(f(\mathbf{e}_{r+1}), \dots, f(\mathbf{e}_n))$ est une famille libre, c'est donc une base de $\mathrm{Im}(f)$, ce qui montre le théorème. $\square$

Proposition 37. *Soit $\boldsymbol{y} \in F$, on s'intéresse à l'équation $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$. Supposons $\boldsymbol{y} \in \mathrm{Im}(f)$ et $\boldsymbol{x}_0$ vérifie $f(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{y}$. Alors l'ensemble des solutions de l'équation $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$ est*

$$\boldsymbol{x}_0 + \ker(f) = \{\boldsymbol{x} \in E : \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 \in \ker(f)\} \ .$$

Preuve : Exercice ! $\square$

2.3.6 Résolution d'un système linéaire

Soit $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbf{e}'_1, \dots \mathbf{e}'_n$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soient $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On peut écrire, pour tout $i \in \{1, \dots p\}$,

$$\mathbf{v}_i = \sum_{j=1}^n v_{j,i} \mathbf{e}'_j \ .$$

La propriété universelle assure l'existence et l'unicité de l'application linéaire f telle que $f(\mathbf{e}_i) = \mathbf{v}_i$.

Soit $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^p x_i \mathbf{e}_i$ un vecteur de $\mathbb{R}^p$, son image par f est donc

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^p x_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^p x_i \sum_{j=1}^n v_{j,i} \mathbf{e}'_j = \sum_{j=1}^n \big(\sum_{i=1}^p v_{j,i} x_i\big) \mathbf{e}'_j \ .$$

Le vecteur $\mathbf{x}$ appartient au noyau de f si et seulement si ses coordonnées sont solutions du système linéaire

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^p v_{1,i} x_i = 0 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^p v_{n,i} x_i = 0 \end{cases}$$

Soit r le rang de ce système linéaire. On a d'après le théorème du rang $\dim(\ker(f)) = n - r$.

2.3.7 Isomorphismes

Definition 38. *Soient E et F deux espaces vectoriels et soit $f \in L(E,F)$. f est appelée isomorphisme d'espaces vectoriels s'il existe $g \in L(F,E)$ telle que $f \circ g = id_F$ et $g \circ f = id_E$. Si g existe, on l'appelle inverse de f et on la note f^{-1}.*

Un isomorphisme entre E et E est appelé automorphisme.

Proposition 39. *La composée de deux isomorphismes $f : E \to F$ et $g : F \to G$ est un isomorphisme et on a*

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} \quad .$$

Preuve : Exercice ! □

Proposition 40. *Si f est une application linéaire bijective, c'est un isomorphisme.*

Preuve : Exercice ! □

Proposition 41. *Soient E et F deux espaces de même dimension n et $f \in L(E,F)$.*
- *Si f est injective, c'est un isomorphisme.*
- *Si f est surjective, c'est un isomorphisme.*

Preuve : Exercice ! □

Proposition 42. *Deux espaces vectoriels de dimension finie sont isomorphes si et seulement s'ils sont de même dimension.*

Tout K-espace vectoriel de dimension n est isomorphe à K^n.

Preuve : Exercice ! □

Proposition 43. *Soit G un sous-espace de E et $f : E \to F$ un isomorphisme, alors la restriction de f à G est un isomorphisme de G vers $f(G)$.*

Preuve : Exercice ! □

2.4 Matrice

Soit E un espace vectoriel de dimension p muni d'une base $B = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p)$, F un espace vectoriel de dimension n muni d'une base $B' = (\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n)$. La donnée d'une application $f \in L(E,F)$ est équivalente à la donnée du tableau suivant

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,p} \end{bmatrix} \quad ,$$

où, pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$,

$$f(\mathbf{e}_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{j,i} \mathbf{e}'_j \quad .$$

En effet, la donnée de f implique bien sûr la donnée de $\mathbf{M}$ et réciproquement, si on connait les coefficients de $\mathbf{M}$, alors, pour tout $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{p} u_i \mathbf{e}_i \in E$, on a

$$f(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{p} u_i f(\mathbf{e}_i) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{p} a_{j,i} u_i \right) \mathbf{e}'_j \ .$$

Pour bâtir la matrice $\mathbf{M}$, on met donc dans les colonnes les coefficients des vecteurs $f(\mathbf{e}_i)$ décomposés dans la base B'.

2.4.1 Matrices et applications linéaires

Definition 44. *Une matrice à coefficients dans K à n lignes et p colonnes est un tableau de np scalaires $(a_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant p}$*

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} \end{bmatrix} \ .$$

Le terme général $a_{i,j}$ de cette matrice est celui situé à la i-ème ligne et à la j-ème colonne. Une matrice à n lignes et p colonnes est dite de type (n, p). On note $M_{n,p}$ ou $M_{n,p}(K)$ l'ensemble des matrices de type (n, p) à coefficients dans K. Si $n = p$, on dit que la matrice est carrée de taille n. On note M_n ou $M_n(K)$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients dans K.

2.4.2 Matrice d'une application linéaire

Soit E un espace vectoriel de dimension p muni d'une base $B = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p)$, F un espace vectoriel de dimension n muni d'une base $B' = (\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n)$. On peut définir l'application Φ qui à tout $f \in L(E, F)$ associe la matrice

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} \end{bmatrix} \ ,$$

telle que, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$,

$$f(\mathbf{e}_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{j,i} \mathbf{e}'_j \ .$$

Proposition 45. *L'application Φ est une bijection.*

Preuve : Exercice ! □

Definition 46. *Soit $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{M}'$ deux matrices de $M_{n,p}$ de coefficients génériques respectifs $a_{i,j}$ et $a'_{i,j}$ et soit $\lambda \in K$*

La somme des matrices $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{M}'$ est la matrice $\boldsymbol{M} + \boldsymbol{M}'$ de coefficient générique $a_{i,j} + a'_{i,j}$.

La multiplication de la matrice $\boldsymbol{M}$ par le scalaire λ est la matrice $\lambda \boldsymbol{M}$ de coefficient générique $\lambda a_{i,j}$.

Proposition 47. *Muni de ces deux opérations, $M_{n,p}$ est un espace vectoriel et l'application Φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.*

Preuve : Exercice ! □

2.4.3 Matrices particulières

Matrices diagonales. Une matrice carrée telle que $a_{i,j} = 0$ lorsque $i \neq j$ est appelée matrice diagonale. On note parfois $\mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n)$ la matrice carrée de taille n diagonale dont les coefficients de la diagonale sont $a_1, \ldots, a_n$.

Matrice unité. La matrice unité est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux valent tous 1. On note celle de taille n $\mathbf{I}_n$. C'est la matrice de l'application identité de E dans n'importe quelle base.

Matrice triangulaire. Une matrice dont tous les coefficients $a_{i,j}$ avec $i > j$ sont nuls est appelée matrice triangulaire supérieure.

Si tous les coefficients $a_{i,j}$ avec $i < j$ sont nuls, la matrice est dite triangulaire inférieure.

Le matrices diagonales sont les matrices triangulaires supérieure et inférieure.

Matrices lignes, colonnes. Si $n = 1$, la matrice n'a qu'une ligne, on l'appelle matrice ligne.

Si $p = 1$, la matrice n'a qu'une colonne, on dit que c'est une matrice colonne.

On identifiera toujours un vecteur avec la matrice colonne de ses coefficients.

Base canonique. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $j \in \{1, \ldots, p\}$, on note $E_{i,j}$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui à la i-ème ligne et j-ème colonne qui vaut 1. Les matrices $E_{i,j}$ forment une base de $M_{n,p}$.

Matrice de transvection. Une matrice carrée de taille n de la forme $\mathbf{T}_{i,j}(\alpha) = \mathbf{I}_n + \alpha E_{i,j}$ pour un couple (i, j) tel que $i \neq j$ est appelée matrice de transvection.

Matrice de transposition. Une matrice carrée de taille n de la forme $P_{i,j} = \mathbf{I}_n + E_{i,j} + E_{j,i} - E_{i,i} - E_{j,j}$ pour un couple (i, j) tel que $i \neq j$ est appelée matrice de transposition.

2.4.4 Matrice de la composée

On considère trois espaces vectoriels E, F et G de dimension finie :
- E est muni d'une base $B = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m)$,
- F est muni d'une base $B' = (\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n)$,
- G est muni d'une base $B'' = (\mathbf{e}''_1, \ldots, \mathbf{e}''_p)$.

On se donne aussi des applications linéaires $f : E \to F$ et $g : F \to G$.

On note $R \in M_{n,m}$ la matrice de f entre les bases B et B', $S \in M_{p,n}$ la matrice de g entre les bases B' et B''.

On sait que $g \circ f$ est aussi une application linéaire de E dans G. Notons $T \in M_{p,m}$ sa matrice entre les bases B et B''.

Soit $r_{i,j}$ le coefficient générique de R, $s_{i,j}$ celui de S et $t_{i,j}$ celui de T.

On a, pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$,

$$\sum_{i=1}^{p} t_{i,k}\mathbf{e}''_i = g \circ f(\mathbf{e}_k) = g\left(\sum_{j=1}^{n} r_{j,k}\mathbf{e}'_j\right) = \sum_{j=1}^{n} r_{j,k} \sum_{i=1}^{p} s_{i,j}\mathbf{e}''_i = \sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n} s_{i,j} r_{j,k}\right)\mathbf{e}''_i \ .$$

Par unicité de la décomposition d'un vecteur dans une base, on a donc, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$ et tout $k \in \{1, \dots, m\}$,

$$t_{i,k} = \sum_{j=1}^{n} s_{i,j} r_{j,k} \quad .$$

Isolons la i-ème ligne de S et la k-ème colonne de R,

$$\begin{bmatrix} s_{i,1} & \dots & s_{i,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{1,k} \\ \vdots \\ r_{n,k} \end{bmatrix} \quad ,$$

$t_{i,k}$ s'obtient en multipliant les termes de même rang des ces vecteurs et en prenant la somme de ces produits.

Pour calculer la matrice T, il faut faire mp fois cette opération.

Produit de matrices

Definition 48. *Soit $S \in M_{p,n}$ et $R \in M_{n,m}$ deux matrices telles que le nombre de colonnes de S soit égal au nombre de ligne de R. Soient $s_{i,j}$ le coefficient générique de S et $r_{i,j}$ celui de R. Le produit des matrices S et R, noté SR est la matrice $T \in M_{p,m}$ de coefficient générique*

$$t_{i,k} = \sum_{j=1}^{n} s_{i,j} r_{j,k} \quad .$$

Par construction donc SR est la matrice de la composée $g \circ f$ des applications $g : F \to G$ et $f : E \to F$ de matrices respectives S et R.

2.4.5 Propriétés du produit

Proposition 49. *Pour toute matrice $\boldsymbol{M} \in M_{n,p}$, $\boldsymbol{M}\boldsymbol{I}_p = \boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{I}_n\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}$.*

Preuve : Exercice ! □

Proposition 50. *Soient $\boldsymbol{A} \in M_{n,p}$, $\boldsymbol{B} \in M_{p,q}$, $\boldsymbol{C} \in M_{q,r}$. On a*

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\boldsymbol{C} \quad .$$

Preuve : Exercice ! □

Proposition 51. *Pour toutes matrices pour lesquelles ces opérations sont licites, on a*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{C} \quad , \\ (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})\boldsymbol{C} &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{C} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{C} \quad , \\ \boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{B}) = (\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} &= \lambda(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) \quad . \end{aligned}$$

Preuve : Exercice ! □

Definition 52. *Une matrice carrée $\boldsymbol{A}$ de taille n est inversible s'il existe une matrice $\boldsymbol{B}$ telle que $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}_n$. Lorsqu'elle existe, une telle matrice $\boldsymbol{B}$ est unique, on l'appelle l'inverse de $\boldsymbol{A}$ et on la note $\boldsymbol{A}^{-1}$.*

Vérifier que $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$. Si $\mathbf{A}$ n'est pas carrée elle ne peut pas avoir d'inverse. Si $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont des matrices carrées inversibles, vérifier que $\mathbf{AB}$ est inversible et que

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} \quad .$$

Si f est un automorphisme de E sa matrice dans une base B est inversible et l'inverse de f, f^{-1} a pour matrice $\mathbf{A}^{-1}$ dans la base B.

2.4.6 Changement de base

Soit E, F deux espaces vectoriels de dimension finie, soient B_E et B'_E deux bases de E, B_F et B'_F deux bases de F. Soit $f \in L(E,F)$. Soit $\mathbf{A}$ la matrice de f de E muni de B_E dans F muni de B_F, soit $\mathbf{A}'$ la matrice de f de E muni de B'_E dans F muni de B'_F. Soit $\mathbf{P}_E$ la matrice de l'identité de (E, B_E) dans (E, B'_E) (cette matrice est appelée matrice de passage de B_E à B'_E) et $\mathbf{P}_F$ la matrice de l'identité de (F, B_F) dans (F, B'_F).

Le tableau suivant résume la situation

$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{A} & \\ (E, B_E) & \rightarrow & (F, B_F) \\ & f & \\ \mathbf{P}_E \uparrow \mathrm{id}_E & & \mathrm{id}_F \uparrow \mathbf{P}_F \\ & f & \\ (E, B'_E) & \rightarrow & (F, B'_F) \\ & \mathbf{A}' & \end{array} \quad .$$

Clairement, on a $f = \mathrm{id}_F \circ f \circ \mathrm{id}_E$, ce qui se réécrit matriciellement.

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}_F \mathbf{A}' \mathbf{P}_E^{-1} \quad .$$

Cette relation est connue sous le nom de *formule de changement de base.*

Important : Pour ne pas se tromper dans cette relation, mieux vaut éviter de l'apprendre et chercher plutôt à la retrouver avec le petit schéma précédent !

Definition 53. *Deux matrices carrées $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{A}'$ sont dites semblables s'il existe une matrice inversible $\boldsymbol{P}$ telle que $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}'\boldsymbol{P}^{-1}$.*

Definition 54. *Le rang d'une application $f \in L(E,F)$ est la dimension de Im(f). Le rang d'une matrice $\boldsymbol{A}$ est le rang de l'application linéaire f qu'elle représente. C'est la dimension de l'espace engendré par les colonnes de $\boldsymbol{A}$.*

Definition 55. *La trace de la matrice $\boldsymbol{A}$ carrée de taille n est la somme de ces coefficients diagonaux : si $a_{i,j}$ est le coefficient générique de $\boldsymbol{A}$:*

$$Tr(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} \quad .$$

Proposition 56. *Pour toutes matrices carrées $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ de taille n, on a*

$$Tr(\boldsymbol{AB}) = Tr(\boldsymbol{BA}) \quad .$$

En particulier, la trace d'une matrice est égale à celle de toute matrice qui lui est semblable.

Preuve : Exercice ! □

Definition 57. *Soit $\boldsymbol{A} \in M_{n,p}$ une matrice de coefficient générique $a_{i,j}$. La transposée de $\boldsymbol{A}$ est la matrice notée $\boldsymbol{A}^T$ de $M_{p,n}$ de coefficient générique $b_{i,j}$ défini par*

$$b_{i,j} = a_{j,i} \quad .$$

2.5 Sommes directes

2.5.1 Décomposition en somme directe

Definition 58. *Soit E un espace vectoriel et F et G deux sous-espaces de E. On dit que E est somme directe de F et G et on note $E = F \oplus G$ si tout vecteur $\boldsymbol{u}$ de E se décompose de manière unique sous la forme $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$, avec $\boldsymbol{v} \in V$ et $\boldsymbol{w} \in W$. On dit alors que F et G sont supplémentaires dans E ou que F est un supplémentaire de G dans E.*

Proposition 59. *On a $E = F \oplus G$ si et seulement si $E = F + G$ et $F \cap G = \{0\}$.*

Preuve : Supposons que $E = F \oplus G$. Alors clairement $E = F + G$ et, si $\mathbf{u} \in F \cap G$, on a $\mathbf{u} = \mathbf{u} + 0$ avec $\mathbf{u} \in F$ et $0 \in G$ et $\mathbf{u} = 0 + \mathbf{u}$ avec $0 \in F$ et $\mathbf{u} \in G$, donc, par unicité, $\mathbf{u} = 0$.

Réciproquement, supposons que $E = F + G$ et $F \cap G = \{0\}$. Soit $\mathbf{u} \in E$, comme $E = F + G$, il existe $\mathbf{v} \in F$ et $\mathbf{w} \in G$ tels que $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$. Supposons maintenant qu'il existe également $\mathbf{v}' \in F$ et $\mathbf{w}' \in G$ tels que $\mathbf{u} = \mathbf{v}' + \mathbf{w}'$. Alors $\mathbf{v} - \mathbf{v}' = \mathbf{w}' - \mathbf{w}$. Comme $\mathbf{v} - \mathbf{v}' \in F$ et $\mathbf{w}' - \mathbf{w} \in G$, ces vecteurs sont dans $F \cap G$, ils sont donc nuls. □

Proposition 60. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$.*

1. *Si B est une base de F et B' une base de G, alors $B \cup B'$ est une base de E.*
2. $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$.

Preuve : Exercice ! □

Proposition 61. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. Alors F admet un supplémentaire dans E.*

Preuve : Exercice ! □

Si $\dim(E) = n$ et $\dim(F) = k$, tout supplémentaire de F est de dimension $n - k$. Les espaces E et $\{0\}$ sont supplémentaires dans E. En général, un supplémentaire de sous-espace n'est pas unique : dans $\mathbb{R}^3$, si $F = \mathrm{Vect}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, tout vecteur de la forme $\mathbf{u} = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2 + c\mathbf{e}_3$ tel que $c \neq 0$ vérifie $G = \mathrm{Vect}(\mathbf{u})$ est supplémentaire de F dans E.

2.5.2 Sommes directes finies

On peut généraliser les résultats de la section précédente au cas de n sous-espaces $F_i, 1 \leqslant i \leqslant n$.

Definition 62. *On dit que E est somme directe des sous-espaces $F_i, 1 \leqslant i \leqslant n$ si tout vecteur $\boldsymbol{u}$ de E s'écrit de manière unique $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}_1 + \ldots + \boldsymbol{v}_n$, avec $\boldsymbol{v}_i \in F_i$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$. On écrit alors $E = \oplus_{i=1}^n F_i$ ou $E = F_1 \oplus \ldots \oplus F_n$. On note aussi $E_{(-i)} = \oplus_{j\in\{1,\ldots,n\}\setminus\{i\}} F_j$.*

Proposition 63. *On a $E = \oplus_{i=1}^n F_i$ si et seulement si $E = F_1 + \ldots + F_n$ et, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $F_i \cap E_{(-i)} = \{0\}$.*

Preuve : Supposons $E = \oplus_{i=1}^n F_i$, alors, $E = F_1 + \ldots + F_n$. Soit maintenant $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $\mathbf{u} \in F_i \cap E_{(-i)}$. Alors s'écrit de manière unique $\mathbf{u} = \sum_{j=1}^n \mathbf{v}_j$, avec $\mathbf{v}_j \in F_j$, donc, comme $\mathbf{u} \in F_i$, tous les $\mathbf{v}_j$, avec $j \neq i$, vérifient $\mathbf{v}_j = 0$, et comme $\mathbf{u} \in E_{(-i)}$, on a $\mathbf{v}_i = 0$, donc $\mathbf{u} = 0$.

Supposons $E = F_1 + \ldots + F_n$ et, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $F_i \cap E_{(-i)} = \{0\}$. Tout vecteur $\mathbf{u}$ de E s'écrit $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_i$, avec $\mathbf{v}_i \in F_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. Supposons que $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \mathbf{v}'_i$ avec $\mathbf{v}'_i \in F_i$, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. Alors, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a

$$\mathbf{v}_i - \mathbf{v}'_i = \sum_{j\in\{1,\ldots,n\}} \mathbf{v}'_j - \mathbf{v}_j \ .$$

Ainsi $\mathbf{v}_i - \mathbf{v}'_i \in F_i \cap E_{(-i)}$, donc $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}'_i$. Ceci étant vrai pour tout i, on a $\mathbf{u} = 0$. □

Proposition 64. *Soit E un espace vectoriel et F_i, $1 \leqslant i \leqslant n$ des sous-espaces vectoriels tels que $E = \oplus_{i=1}^n F_i$.*

1. *Si pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, B_i est une base de F_i, alors $B_1 \cup \ldots \cup B_n$ est une base de E.*
2. $\dim(E) = \sum_{i=1}^n \dim(F_i)$.

Preuve : Exercice ! □

2.5.3 Produit de deux espaces vectoriels

Definition 65. *Soient E_1 et E_2 deux espaces vectoriels sur le même corps K. L'espace produit $E_1 \times E_2$ des couples $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$, où $\boldsymbol{u}_i \in E_i$ pour $i \in \{1, 2\}$ est un espace vectoriel sur K si on le munit des opérations $+$ et $.$ suivantes :*

$$(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) + (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) = (\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{v}_2) \ ,$$
$$\lambda(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) = (\lambda\boldsymbol{u}_1, \lambda\boldsymbol{u}_2) \ .$$

Les applications $p_1 : E_1 \times E_2 \to E_1$ et $p_2 : E_1 \times E_2 \to E_2$, définies par $p_1(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_1$, $p_2(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_2$ sont clairement linéaires et surjectives, leurs noyaux sont $\ker(p_1) = \{(0, \mathbf{u}_2), \mathbf{u}_2 \in E_2\}$ qui est isomorphe à E_2 et $\ker(p_2) = \{(\mathbf{u}_1, 0), \mathbf{u}_1 \in E_1\}$ qui est isomorphe à E_1.

Les applications $j_1 : E_1 \to E_1 \times E_2$ et $j_2 : E_2 \to E_1 \times E_2$, définies par $j_1(\mathbf{u}_1) = (\mathbf{u}_1, 0)$, $j_2(\mathbf{u}_2) = (0, \mathbf{u}_2)$ sont clairement linéaires et injectives, leurs images sont $\mathrm{Im}(p_1) = \ker(p_2)$et $\mathrm{Im}(p_2) = \ker(p_1)$. Enfin, on a $p_1 \circ j_1 = \mathrm{id}_{E_1}$, $p_2 \circ j_2 = \mathrm{id}_{E_2}$.

Proposition 66. *On a* $E_1 \times E_2 = j_1(E_1) \oplus j_2(E_2)$ *et* $\dim(E_1 \times E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2)$.

Preuve : Exercice ! □

2.5.4 Projecteurs

Definition 67. *On appelle projecteur de* E *toute application linéaire* p *telle que* $p \circ p = p$.

Proposition 68. *Soit* E *un espace vectoriel et* p *un projecteur de* E*, on a* $E = \ker(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$.

Preuve : Exercice ! □

Si p est un projecteur $q = \mathrm{id} - p$ aussi, et on a $\ker(p) = \mathrm{Im}(q)$, $\mathrm{Im}(p) = \ker(q)$.

2.6 Permutations

2.6.1 Groupes

Definition 69. *Un groupe* $(G, .)$ *où le point désigne une application* $G \times G \to G$ *est un groupe si la loi . vérifie les axiomes suivants :*
- *associativité :* $(xy)z = x(yz)$*, pout tout* x, y, z *de* G.
- *il existe un élément neutre, noté* 1 *vérifiant* $1x = x1 = x$*, pour tout* $x \in G$.
- *pour tout* $x \in G$*, il existe un élément noté* x^{-1} *et appelé* inverse *de* x *tel que* $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$.

Exemples : L'ensemble $\{-1, 1\}$ muni du produit est un groupe, dont l'élément neutre est 1. L'ensemble $\mathbb{Z}$ muni de la loi $+$ est un groupe d'élément neutre 0.

Definition 70. *Soient* $(G, .)$ *et* $(G', .)$ *deux groupes. Une application* $f : G \to G'$ *est un morphisme de groupe si pour tout* x, y *de* G,

$$f(xy) = f(x)f(y) \quad .$$

Exemples : Les fonctions $z \mapsto az$ sont des morphismes de $(\mathbb{Z}, +)$ dans lui-même, si $a \in \mathbb{Z}$. La fonction log est un morphisme de $(\mathbb{R}_+^*, .)$ dans $(\mathbb{R}, +)$.

2.6.2 Groupe des permutations

Definition 71. *Soit* E *un ensemble et* S_E *l'ensemble des bijections de* E *dans lui même.* S_E *muni de la loi de composition est un groupe (vérifiez le !).*

Si $E = \{1, \ldots, n\}$*,* S_E *est appelé groupe symétrique et les éléments de* S_E *sont appelés permutations de* $\{1, \ldots, n\}$*. On note* S_E *par* S_n *dans ce cas.*

Notation : Soit $\sigma \in S_n$, on note souvent

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix} \quad .$$

Definition 72. *On appelle transposition tout élément de S_n qui échange deux éléments de $\{1,\dots,n\}$ et laisse les autres fixes. On note $\tau = (i,j)$ la transposition qui échange i et j. On a $\tau\tau = id$.*

Definition 73. *On appelle cycle de longueur $r > 1$ toute permutation $\sigma \in S_n$ pour laquelle il existe des éléments $x_1,\dots,x_r$ de E tels que $\sigma(x) = x$ si $x \notin \{x_1,\dots,x_r\}$ et $\sigma(x_1) = x_2$, ..., $\sigma(x_{r-1}) = x_r$, $\sigma(x_r) = x_1$.*

Deux cycles $(x_1,\dots,x_r)$ et $(y_1,\dots,y_s)$ sont disjoints si $\{x_1,\dots,x_r\}\cap\{y_1,\dots,y_s\} = \emptyset$. Deux cycles disjoints commutent.

Proposition 74. *Toute permutation se décompose en produit de cycles disjoints (de manière unique, à l'ordre des cycles près).*

Preuve : Prendre un exemple. □

Théorème 75. *Le groupe S_n est engendré par l'ensemble des transpositions.*

Preuve : Il suffit de le vérifier pour les cycles, et la formule

$$(x_1,\dots,x_r)(x_1,x_r) = (x_2,\dots,x_r) \ ,$$

permet de montrer le résultat par récurrence. □

2.6.3 Signature d'une permutation

Théorème 76. *Soit $\sigma \in S_n$. Si σ s'écrit de deux manières comme produit de transpositions : $\sigma = t_1 \circ \dots \circ t_r = t'_1 \circ \dots \circ t'_{r'}$, alors r et r' ont même parité.*

Pour montrer ce théorème, on s'appuie sur la notion suivante.

Definition 77. *Soit $O = \{(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2 : 1 \leqslant i < j \leqslant n\}$. La signature de $\sigma \in S_n$ est définie par*

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{(i,j)\in O} \frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i} \ .$$

On montre alors le théorème suivant.

Théorème 78. *L'application $\varepsilon : S_n \to \{-1,1\}$, $\sigma \mapsto \varepsilon(\sigma)$ est un isomorphisme de groupe (i.e. un morphisme bijectif dont l'inverse est un morphisme).*

On a alors, sous les hypothèses du théorème 76, $\varepsilon(\sigma) = (-1)^r = (-1)^{r'}$, donc r et r' ont même parité comme annoncé.

2.7 Exercices

Exercice 1

1. Soient a_1, a_2 deux réels distincts, montrer que la famille $(1,a_1)$, $(1,a_2)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^2$.
2. Soient a_1, a_2, a_3 trois réels distincts, montrer que la famille $(1,a_1,a_1^2)$, $(1,a_2,a_2^2)$, $(1,a_3,a_3^2)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.
3. Soient a_1, a_2, a_3, a_4 4 réels distincts, montrer que la famille $(1,a_1,a_1^2,a_1^3)$, $(1,a_2,a_2^2,a_2^3)$, $(1,a_3,a_3^2,a_3^3)$, $(1,a_4,a_4^2,a_4^3)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 2

Les familles suivantes de fonctions sont elles libres ou liées ?

1. Dans $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$, la famille f_1, f_2, f_3 avec $f_1 : x \mapsto 1$, $f_2 : x \mapsto \cos^2(x)$, $f_3 : x \mapsto sin^2(x)$.
2. Dans $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$, la famille f_1, f_2, f_3 avec $f_1 : x \mapsto e^x$, $f_2 : x \mapsto e^{2x}$, $f_3 : x \mapsto e^{3x}$.
3. Dans $F((0,+\infty),\mathbb{R})$, la famille f_1, f_2, f_3 avec $f_1 : x \mapsto \ln(x)$, $f_2 : x \mapsto \ln^2(x)$, $f_3 : x \mapsto \ln^3(x)$.
4. Dans $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$, la famille f_1, f_2, f_3 avec $f_1 : x \mapsto e^x$, $f_2 : x \mapsto e^{-x}$, $f_3 : x \mapsto \cosh(x)$.
5. Dans $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$, la famille $(f_n, n \in \mathbb{N})$ avec $f_n : x \mapsto e^{nx}$.
6. Dans $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$, la famille $(f_n, n \in \mathbb{N})$ avec $f_n : x \mapsto |x-n|$.
7. Dans $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$, la famille $(f_k, k \in \{1,\dots,n\})$ avec $f_k : x \mapsto \sin(kx)$.
8. Dans $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$, la famille $(f_k, k \in \{1,\dots,n\})$ avec $f_k : x \mapsto \cos(kx)$.
9. Dans $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$, la famille $(f_k, g_k, k \in \{1,\dots,n\})$ avec $f_k : x \mapsto \sin(kx)$, $g_k : x \mapsto \cos(kx)$.
10. Dans $F((-2,2),\mathbb{R})$, la famille f_1, f_2, f_3 avec $f_1 : x \mapsto 1/(x-2)$, $f_2 : x \mapsto 1/(x+2)$, $f_3 : x \mapsto (4x+7)/(x^2-4)$.

Exercice 3

Montrer que les familles suivantes sont des bases des espaces indiqués.

1. Dans $\mathbb{R}_4[X]$, la famille $(1, X-1, (X-1)^2, (X-1)^3, (X-1)^4)$. Donner la décomposition d'un polynôme P de $\mathbb{R}_4[X]$ dans cette base en fonction de la valeur de P et de ses dérivées en 1.
2. Dans $\mathbb{R}_2[X]$, la famille $(X, X(X+1), (X+1)^2)$. Donner la décomposition de 1, X, X^2 dans cette base, puis la décomposition d'un polynôme $P(X) = a + bX + cX^2$ de $\mathbb{R}_2[X]$ dans cette base.
3. Dans $\mathbb{R}_4[X]$, la famille
$$\left(1, X, \frac{X(X-1)}{2}, \frac{X(X-1)(X-2)}{6}, \frac{X(X-1)(X-2)(X-3)}{24}\right) .$$
Donner l'écriture des polynômes $1 + X + X^2 + X^3$ et $1 + X + X^2 + X^4$ dans cette base.
4. Généraliser la base de la question précédente pour obtenir une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Montrer que les polynômes de cette base vérifient $P(z) \in \mathbb{Z}$, pour tout $z \in \mathbb{Z}$. Montrer que tout polynôme vérifiant cette propriété est combinaison linéaire à coefficients entiers des éléments de la base.
5. Soit $n \geqslant 0$ un entier et pour tout $k \in \{0,\dots,n\}$, soit
$$B_k(X) = \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} .$$
Pour toute fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, on définit
$$P_f = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) B_k .$$

P_f est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ appelé polynôme de Bernstein associé à f.

(a) Montrer que $(B_k, k \in \{0, \dots, n\})$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

(b) Exprimer les polynômes $1, X, X^2$ dans cette base. (On pourra calculer P_f pour chacune de ces fonctions).

Exercice 4

Soient $a_1, \dots, a_{n+1}$ des entiers tous distincts, et, pour tout $i \in \{1, \dots, n+1\}$, soient

$$p_i(X) = \prod_{j \in \{1,\dots,n+1\} \setminus \{i\}} (X - a_j), \quad A = p_i(a_i), \quad P_i(X) = \frac{1}{A_i} p_i(X) \ .$$

1. Montrer que $P_1, \dots, P_{n+1}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Soient $b_1, \dots, b_{n+1}$ des réels quelconques. Déterminer un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $P(a_i) = b_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n+1\}$.
3. Déterminer un polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(0) = 3$, $P(1) = -2$, $P(2) = 5$. En existe-t-il d'autres ?

Exercice 5

Soit $\Delta : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, $P \mapsto \Delta(P)$ avec $\Delta(P)(X) = P(X+1) - P(X)$.

1. Décrire le noyau et l'image de la restriction de Δ à $\mathbb{R}_4[X]$. Donner la dimension de ces espaces.
2. Décrire le noyau et l'image de la restriction de Δ à $\mathbb{R}_n[X]$. Donner la dimension de ces espaces. Montrer que Δ est surjective.
3. Décrire l'ensemble des solutions de l'équation $\Delta(P) = Q$.

Exercice 6

Soit $f : \mathbb{R}_4[X] \to \mathbb{R}_4[X]$ défini par $f(P) = (X-1)P' - P$.

1. Déterminer $\ker(f)$.
2. Déterminer l'ensemble des vecteurs Q pour lesquels l'équation $f(P) = Q$ a une solution. (on pourra calculer $f(X-1)^k$), pour tout $k \in \{1, \dots, 4\}$).
3. Résoudre $(X-1)P' - P = X^2 - 2X + 2$.

Exercice 7

Soit $f \in L(E, F)$ une application injective. Montrer qu'il existe une application linéaire $g : F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_E$.

Exercice 8

Soit $f \in L(E, F)$ une application surjective. Montrer qu'il existe une application linéaire $g : F \to E$ telle que $f \circ g = \mathrm{id}_F$.

Exercice 9

Soient f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $\ker f$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont stables par g.

Exercice 10

Soit $E = \mathrm{Fonc}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\Delta : E \to E$, $f \mapsto \Delta(f) = f(\cdot + 1) - f$.

1. Déterminer $\ker(\Delta)$.
2. Déterminer $\ker(\Delta^2)$.
3. Déterminer $\ker(\Delta^n)$, pour tout $n \geqslant 1$.

Exercice 11

Soit f un endomorphisme de E.

1. Montrer que $\ker(f) \subset \ker(f^2)$ et, plus généralement, que $\ker(f^n) \subset \ker(f^{n+1})$.
2. Montrer que, si $\ker(f^s) = \ker(f^{s+1})$, alors $\ker(f^s) \subset \ker(f^{s+n})$ pour tout $n \geqslant 1$.
3. Montrer que, si E est de dimension finie, il existe s tel que $\ker(f^s) = \ker(f^{s+1})$.

Exercice 12

Soit E l'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et soit $D : E \to E$ tel que $D(f) = f'$. Supposons qu'il existe un endomorphisme L de E et un entier $n \geqslant 2$ tels que $D = L^n$.

1. Déterminer $\ker(D)$.
2. Montrer que $\ker L \neq \{0\}$.
3. Montrer que $\ker L^k = \ker D$, pour tout $k \geqslant 1$.
4. Obtenir une contradiction en considérant $\ker(D^2)$.

Exercice 13

Calculer, pour tout $n \geqslant 1$, $\mathbf{A}^n$, où

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Exercice 14

Une matrice $\mathbf{A}$ est dite nilpotente s'il existe r tel que $\mathbf{A}^r = 0$.

1. Si $\mathbf{A}$ est nilpotente, est-elle inversible ?
2. Montrer qu'un matrice triangulaire supérieure est nilpotente si et seulement si ses coefficients diagonaux sont nuls.
3. Montrer que, si $\mathbf{A}$ est nilpotente $\mathbf{I} + \mathbf{A}$ est inversible et exprimer son inverse en fonction des puissances de $\mathbf{A}$.

Exercice 15

1. Déterminer le nombre d'opérations de base (additions et multiplications) nécessaire pour effectuer le calcul du produit de deux matrices carrées de taille 2.
2. On pose $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ carrée de taille 2 de coefficient générique respectifs $a_{i,j}$, $b_{i,j}$ et on note $c_{i,j}$ le coefficient générique de $\mathbf{AB}$.

   $$\begin{array}{l} E = (a_{1,1} + a_{2,2})(b_{1,1} + b_{2,2}), \qquad F = (a_{2,1} + a_{2,2})b_{1,1} \\ G = a_{1,1}(b_{1,2} - b_{2,2}), \qquad H = a_{2,2}(b_{2,1} - b_{1,1}), \qquad J = (a_{1,1} + a_{1,2})b_{2,2} \quad , \\ K = (a_{2,1} - a_{1,1})(b_{1,1} + b_{1,2}), \qquad L = (a_{1,2} - a_{2,2})(b_{2,1} + b_{2,2}) \quad . \end{array}$$

   Vérifier que

   $$c_{1,1} = E+H-J+L, \quad c_{1,2} = G+J, \quad c_{2,1} = F+H, \quad c_{2,2} = E+G-F+K \quad .$$

3. Supposons maintenant que $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont deux matrices de tailles 2^k. On peut décomposer ces matrices par blocs en 4 matrices de tailles 2^{k-1}. Vérifier qu'on peut appliquer les formules précédentes pour déterminer le produit de $\mathbf{A}$ par $\mathbf{B}$ à partir des produits $\mathbf{A}_{i,j}\mathbf{B}_{k,l}$.
4. En appliquant récursivement la méthode de la question précédente, déterminer le nombre d'opérations d'opérations de base nécessaires pour calculer le produit $\mathbf{AB}$ avec cette méthode. Comparer au nombre d'opérations de base nécessaires par la méthode directe.
5. Comment généraliser cette méthode à des matrices de taille quelconque ?

Exercice 16

Soient m et n deux entiers. Pour quelle valeur de p $\mathbb{R}^p$ est-il isomorphe à

1. $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$?
2. $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^m$?

Exercice 17

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $B = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ une base de E. Montrer que $E = \oplus_{i=1}^n \operatorname{Vect}(\mathbf{e}_i)$.

Exercice 18

Soit E un espace vectoriel B une base de E et B_1, B_2 une partition de B. Montrer que $E = \operatorname{Vect}(B_1) \oplus \operatorname{Vect}(B_2)$.

Exercice 19

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $F \cap G = \{0\}$, $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$. Montrer que $E = F \oplus G$.

Exercice 20

Si $E = F_1 \oplus F_2$ et G est un sous-espace vectoriel de E, a-t-on $G = G \cap F_1 \oplus G \cap F_2$?

Exercice 21

Montrer que $E = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$ si et seulement si $E = F_1 + F_2 + F_3$ et $F_1 \cap F_2 = \{0\}$, $F_3 \cap (F_1 + F_2) = \{0\}$.

Exercice 22

Soit E un espace de dimension finie n, F et G deux sous-espaces de E de même dimension k. Montrer qu'il existe un sous-espace de E qui est supplémentaire de F et G.

Exercice 23

Soit S l'ensemble des matrices $\mathbf{M}$ de $M_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathbf{M}^T = \mathbf{M}$ et A l'ensemble des matrices $\mathbf{M}$ de $M_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathbf{M}^T = -\mathbf{M}$. Montrer que S et A sont des sous-espaces supplémentaires de $M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 24

Soient p et q deux projecteurs de E. A quelles conditions sur les noyaux et images de p et q équivalent les relations $p \circ q = p$ et $p \circ q = q$?

Exercice 25

1. Donner un exemple de projecteurs p et q tels que $p \circ q = q \circ p$.
2. Donner un exemple de projecteurs p et q tels que $p \circ q \neq q \circ p$.
3. Soient $E_1 = \ker(p) \cap \ker(q)$, $E_2 = \mathrm{Im}(p) \cap \ker(q)$, $E_3 = \ker(p) \cap \mathrm{Im}(q)$, $E_4 = \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$. Montrer que, $E = \oplus_{i=1}^4 E_i$ si et seulement si $p \circ q = q \circ p$.
4. Montrer qu'alors $p \circ q$ et $p + q - p \circ q$ sont des projecteurs. Déterminer leurs images et leurs noyaux.

Exercice 26

Le jeu de taquin se joue sur un carré de 16 cases dont une est vide. La seule façon de changer la disposition des cases est de faire glisser une case dans la case vide. Si la position de départ est la suivante

13	14	15	vide
9	10	11	12
5	6	7	8
1	2	3	4

,

peut-on trouver une suite de mouvement amenant à la position suivante ?

13	15	14	vide
9	10	11	12
5	6	7	8
1	2	3	4