Préambule : lois Gamma et Beta.

Pour $a, b > 0$ donnés, la loi Gamma(a,b) a pour densité (par rapport à Lebesgue) :

$$x \mapsto \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} \mathrm{e}^{-bx} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x) , \quad \text{avec} \quad \Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x .$$

Pour $\alpha, \beta > 0$ donné la loi Beta(α, β) a pour densité :

$$x \mapsto \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} \mathbb{1}_{[0,1]}(x) .$$

La moyenne et la variance d'une variable $V \sim$Beta(α, β) sont données par

$$\mathbb{E}[V] = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} , \quad \mathrm{Var}(V) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

Le lien entre ces lois se fait par le fait suivant : Soient X et Y deux variables indépendantes distribuées suivant des lois $\Gamma(\alpha, 1)$ et $\Gamma(\beta, 1)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$. Alors

$$U = X + Y \quad \text{et} \quad V = \frac{X}{X+Y}$$

sont deux variables indépendantes distribuées suivant des lois Gamma$(\alpha+\beta, 1)$ et Beta(α, β).

Exercice 1. Soit $Z = (X_1, \ldots, X_n)$ un n-échantillon du modèle $(\{0,1\}, \mathscr{P}(\{0,1\}), \{\mathrm{Ber}(\theta) : \theta \in \Theta = [0,1]\})$. On choisit comme loi a priori pour le paramètre θ une loi $\Pi = \mathrm{Beta}(\alpha, \beta)$.

1. Déterminer la distribution marginale des observations.
2. Déterminer la loi a posteriori du paramètre.
3. Déterminer l'estimateur bayésien pour la perte quadratique.

Exercice 2. Dans son essai posthume "An essay towards solving a problem in the doctrine of chances" en 1763, Thomas Bayes résout le problème suivant, qui est à la base du développement des statistiques bayésiennes. On place n boules rouges sur une table de billard et une boule blanche. On suppose que les boules sont positionnés indépendamment et suivant une loi uniforme sur la table. On choisit un bord de la table de billard. Le statisticien observe le nombre de boules rouges qui sont plus proches du bord que la boule blanche. On appelle θ la distance de la boule blanche au bord de la table en prenant par convention que la distance entre les 2 bords opposés est égale à 1.

1. Quelle est la loi a priori de θ.
2. Déterminer la loi de l'observation conditionnellement au paramètre et en déduire la vraisemblance du modèle associé.
3. Déterminer la loi a posteriori de la distance de la boule blanche au bord de la table.

Exercice 3. Soit $Z = (X_1, \ldots, X_n)$ un n-échantillon de la loi de Poisson de paramètre $\theta \in \Theta = \mathbb{R}_+^*$. Nous supposons que la loi a priori du paramètre θ est une loi $\Gamma(a,b)$ avec $a, b > 0$.

1. Déterminer la loi a posteriori du paramètre θ.
2. Déterminer l'estimateur bayésien pour la perte quadratique et pour la perte "0-1".

Exercice 4. Soient $(X_1,\ldots,X_n)$ n variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre $\theta \in \Theta = \mathbb{R}_+^*$,

$$x \mapsto p(\theta;x) = \theta^{-1}\mathrm{e}^{-x/\theta}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x) .$$

Soit $\theta_0 > 0$. On considère le test

$$H_0:\ \theta \le \theta_0, \qquad \text{contre} \qquad H_1:\ \theta > \theta_0 .$$

1. Montrer que le rapport de vraisemblance est une fonction monotone d'une statistique que l'on déterminera.
2. Déterminer un test U. P. P.(α) pour ce test. On explicitera le calcul des constantes dans la définition de la fonction critique du test.

Exercice 5. Soit p_0 et p_1 deux densités par rapport à une mesure σ-finie μ sur un espace mesurable $(\mathsf{Z},\mathscr{Z})$. On considère le test

$$H_0:\ p = p_0, \qquad \text{contre} \qquad H_1:\ p = p_1 . \tag{1}$$

Pour $\alpha \in]0,1[$, considérons la fonction critique ϕ_α donnée par

$$\phi_\alpha(z) = \begin{cases} 1 & p_1(z) > c_\alpha p_0(z) ,\\ \gamma_\alpha & p_1(z) = c_\alpha p_0(z) ,\\ 0 & p_1(z) < c_\alpha p_0(z) ,\end{cases}$$

où $\gamma_\alpha \in [0,1]$ et $c_\alpha \ge 0$ sont solutions de l'équation

$$\mathbb{E}_0[\phi_\alpha(Z)] = \mathbb{P}_0(p_1(Z) > cp_0(Z)) + \gamma\mathbb{P}_0(p_1(Z) = cp_0(Z)) = \alpha .$$

On rappelle que ϕ_α est U. P. P.(α) pour le test (1).

1. Montrer que pour $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1$, $c_{\alpha_1} \ge c_{\alpha_2}$.
2. Montrer que pour $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1$,
$$\mathbb{E}_1[1-\phi_{\alpha_1}(Z)] \ge \mathbb{E}_1[1-\phi_{\alpha_2}(Z)] . \tag{2}$$
3. Montrer que si on a égalité dans (2) alors il existe un test de taille strictement inférieure à α_2 et de puissance égale à 1 [plus difficile].

Exercice 6. Dans des applications de sondage (fiabilité, sondage), au lieu de choisir a priori la taille d'un échantillon, on effectue l'expérience pendant un temps aléatoire jusqu'à obtenir n réponses positives. Plus précisément, soit $\{X_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes distribuées suivant une loi de Bernoulli de paramètre $\theta \in \Theta =]0,1[$. Notons $T_0 = 0$ et définissons récursivement les instants

$$T_i = \inf\{k > T_{i-1}, X_k = 1\} ,$$

c'est-à-dire l'instant où l'on tire le i-ième objet défectueux. On pose

$$Y_i = T_i - T_{i-1} - 1 .$$

1. Montrer que les variables aléatoires $Y_1,\dots,Y_n$ sont indépendantes, distribuées suivant une loi géométrique de paramètre θ,

$$\mathbb{P}_\theta(Y_i = k) = \theta(1-\theta)^k\,, \quad k \in \mathbb{N}\,.$$

Soit $\theta_0 \in \Theta$. On considère le test

$$H_0:\ \theta \leq \theta_0, \qquad \text{contre} \qquad H_1:\ \theta > \theta_0. \tag{3}$$

2. Soit $Z = (Y_1,\cdots,Y_n)$ le vecteur d'observation. Montrer que le rapport de vraisemblance est monotone par rapport à la statistique $T(Z) := \sum_{i=1}^n Y_i$.
3. Montrer que pour tout $\theta \in \Theta$,

$$\mathbb{P}_\theta(T(Z) = k) = \binom{n+k-1}{k}\theta^n(1-\theta)^k\,.$$

4. Déterminer la fonction critique d'un test U.P.P.(α) pour $\alpha \in \,]0,1[$.
5. Déterminer la puissance du test. *Indications : montrer que, pour tout $c \in \mathbb{N}$, $\theta \mapsto \mathbb{P}_\theta(T_n \leq c)$ est monotone et observer que $T(Z) = T_n - n$.*

Exercice 7. Soient $Z = (X_1,\dots,X_n)$ n variables aléatoires réelles indépendantes de loi de densité

$$p(\theta,x) = \mathrm{e}^{-(x-\theta)}\mathbb{1}_{]\theta,\infty[}(x)\,, \qquad \theta \in \mathbb{R}\,.$$

Pour $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose $x_{1:n} = \min(x_1,\dots,x_n)$. Soit $\theta_0 < \theta_1$. Pour $\alpha \in \,]0,1[$, on considère le test

$$H_0:\ \theta = \theta_0, \qquad \text{contre} \qquad H_1:\ \theta = \theta_1.$$

1. Montrer que le rapport de vraisemblance est donné, pour tout $(x_1,\dots,x_n)$ tel que $x_{1:n} > \theta_0$, par

$$\frac{p(\theta_1;x_1,\dots,x_n)}{p(\theta_0;x_1,\dots,x_n)} = \begin{cases} \mathrm{e}^{n(\theta_1-\theta_0)} & \text{si} \quad x_{1:n} > \theta_1\,, \\ 0 & \text{si} \quad \theta_0 < x_{1:n} \leq \theta_1\,. \end{cases}$$

2. Montrer qu'on peut choisir la fonction critique d'un test U.P.P.(α) de l'une des deux formes suivantes

$$\phi_1(x_1,\dots,x_n) = \begin{cases} 1 & x_{1:n} > \theta_1\,, \\ \gamma & \theta_0 < x_{1:n} \leq \theta_1\,, \end{cases} \qquad \text{ou} \qquad \phi_2(x_1,\dots,x_n) = \begin{cases} \gamma & x_{1:n} > \theta_1\,, \\ 0 & \theta_0 < x_{1:n} \leq \theta_1\,, \end{cases}$$

où γ est une constante de $[0,1)$.
3. Montrer que si $\mathrm{e}^{n(\theta_0-\theta_1)} \leq \alpha$, on peut prendre ϕ_1 comme fonction critique. On déterminera la constante γ dans ce cas.
4. Déterminer la fonction critique du test pour $\mathrm{e}^{n(\theta_0-\theta_1)} > \alpha$.